正多面体

正多面体の定義

1. 凹みのない多面体，すなわち凸多面体である。
2. 各面はすべて合同な正多角形である。
3. 各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

正多面体の 1 つの頂点に集まる面の数

正多面体ならば凸多面体だから，

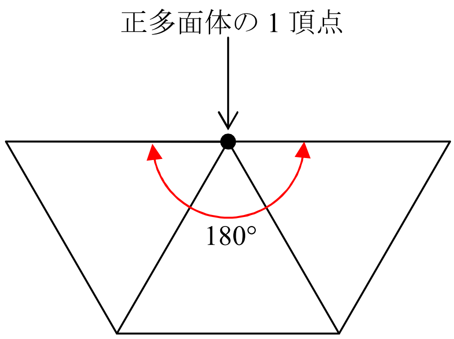
・1 つの頂点に集まる面の角度の合計が 0°より大きく 360°未満である。
（360°だと平面になってしまう）

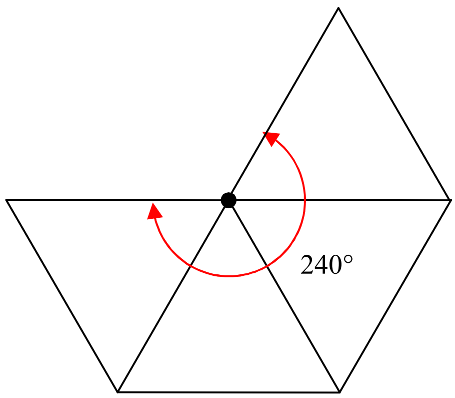
・1 つの頂点に集まる面は 3 面以上である。
（2 面だと面と面が合わさってしまう）

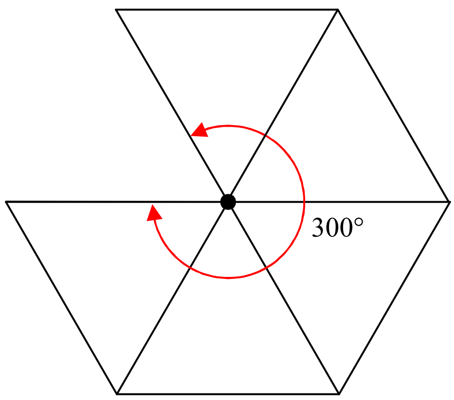
より，

面が正三角形の正多面体

3 種類が考えられる。

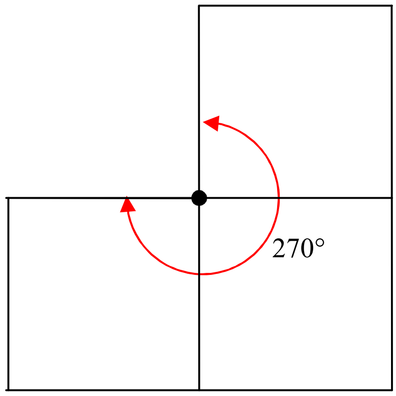






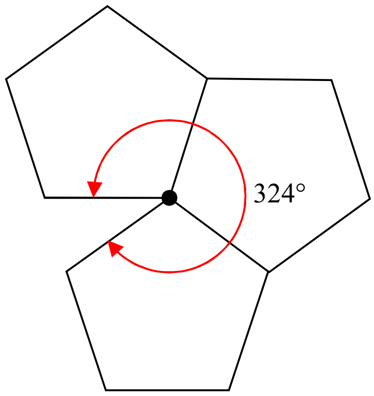
面が正方形の多面体

1 種類が考えられる。



面が正五角形の多面体

1 種類が考えられる。



以上より，全部で 5 種類の正多面体が考えられる。

オイラーの多面体定理と正多面体の種類

オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点（英：vertex），辺（英：edge），面（英：face）の数を，

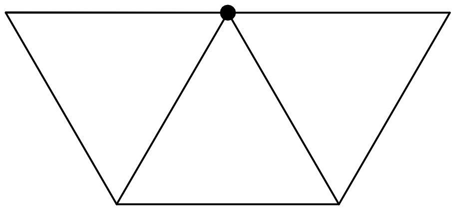
それぞれ $v,\ e,\ f$ とすると，$v-e+f=2$

正多面体の種類

正多面体の頂点，辺，面の数を，それぞれ $v,\ e,\ f$ とする

面が正三角形の正多面体

1 つの頂点に集まる面の数が 3 の場合



f 個の正三角形に分解すると，

正三角形の頂点の数の総和＝辺の数の総和＝$3f$

よって，

$v=\dfrac{3f}{3}=f$ ・・・①（∵正三角形の 3 頂点が合体して正多面体の頂点が 1 つできる）

$e=\dfrac{3f}{2}$ ・・・②（∵正三角形の 2 辺が合体して正多面体の辺が 1 つできる）

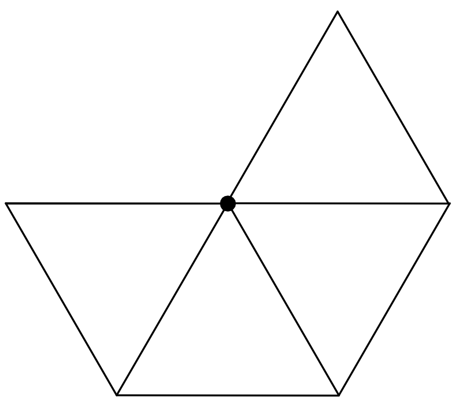
①，②をオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入すると，

$f-\dfrac{3f}{2}+f=2$ より，$f=4$ ・・・③

よって，正四面体ができる。

また，①～③より，$(v,\ e,\ f)=(4,\ 6,\ 4)$

1 つの頂点に集まる面の数が 4 の場合



f 個の正三角形に分解すると，
正三角形の頂点の数の総和＝辺の数の総和＝$3f$
よって，

$v=\dfrac{3f}{4}$ ・・・④（∵正三角形の 4 頂点が合体して正多面体の頂点が 1 つできる）

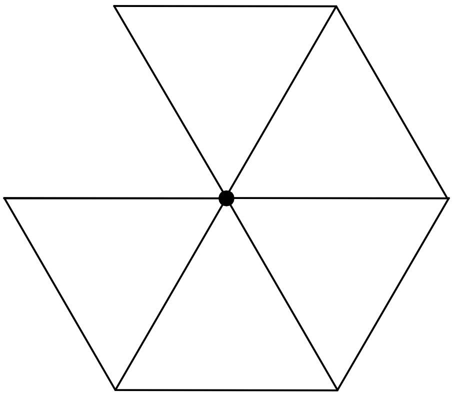
$e=\dfrac{3f}{2}$ ・・・⑤（∵正三角形の 2 辺が合体して正多面体の辺が 1 つできる）

④，⑤をオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入すると，

$\dfrac{3f}{4}-\dfrac{3f}{2}+f=2$ より，$f=8$ ・・・⑥

よって，正八面体ができる。
また，④～⑥より，$(v,\ e,\ f)=(6,\ 12,\ 8)$

1 つの頂点に集まる面の数が 5 の場合



f 個の正三角形に分解すると，
正三角形の頂点の数の総和＝辺の数の総和＝$3f$
よって，

$v=\dfrac{3f}{5}$ ・・・⑦（∵正三角形の 5 頂点が合体して正多面体の頂点が 1 つできる）

$e=\dfrac{3f}{2}$ ・・・⑧（∵正三角形の 2 辺が合体して正多面体の辺が 1 つできる）

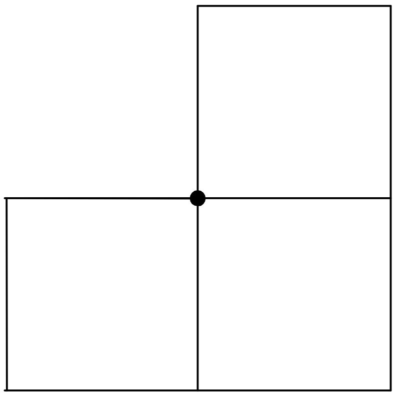
⑦，⑧をオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入すると，

$\dfrac{3f}{5}-\dfrac{3f}{2}+f=2$ より，$f=20$ ・・・⑨

よって，正二十面体ができる。
また，⑦～⑨より，$(v,\ e,\ f)=(12,\ 30,\ 20)$

面が正方形の正多面体

1 つの頂点に集まる面の数は 3



f 個の正方形に分解すると，

正方形の頂点の数の総和＝辺の数の総和＝ $4f$

よって，

$v=\dfrac{4f}{3}$ ・・・⑩（∵正方形の 3 頂点が合体して正多面体の頂点が 1 つできる）

$e=\dfrac{4f}{2}=2f$ ・・・⑪（∵正方形の 2 辺が合体して正多面体の辺が 1 つできる）

⑩，⑪をオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入すると，

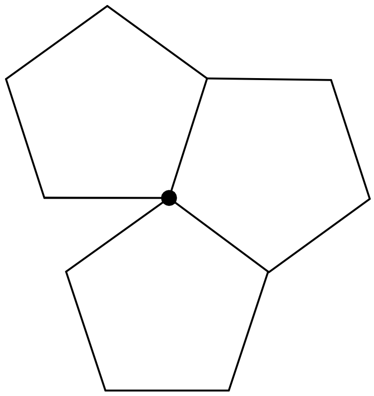
$\dfrac{4f}{3}-2f+f=2$ より， $f=6$ ・・・⑫

よって，正六面体すなわち立方体ができる。

また，⑩～⑫より，$(v,\ e,\ f)=(8,\ 12,\ 6)$

面が正五角形の正多面体

1 つの頂点に集まる面の数は 3



f 個の正五角形に分解すると，

正五角形の頂点の数の総和＝辺の数の総和＝$5f$

よって，

$v=\dfrac{5f}{3}$　・・・⑬（∵正五角形の 3 頂点が合体して正多面体の頂点が 1 つできる）

$e=\dfrac{5f}{2}$　・・・⑭（∵正五角形の 2 辺が合体して正多面体の辺が 1 つできる）

⑬，⑭をオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入すると，

$\dfrac{5f}{3}-\dfrac{5f}{2}+f=2$ より，$f=12$　・・・⑮

よって，正十二面体ができる。

また，⑬～⑮より，$(v,\ e,\ f)=(20,\ 30,\ 12)$

以上を整理すると，

面の形	正三角形			正方形	正五角形
正多面体	正四面体	正八面体	正二十面体	正六面体	正十二面体
面の数/頂点	3	4	5	3	3
頂点の数 v	4	6	12	8	20
辺の数 e	6	12	30	12	30
面の数 f	4	8	20	6	12
$v-e+f$	2	2	2	2	2